ÚMB - Okruhy k bakalářské státní závěrečné zkoušce (v. 2022)

Matematika 1

1. Číselné množiny: přirozená čísla (Peanovy axiomy), racionální čísla, reálná čísla, komplexní čísla, supremum, infimum číselné množiny, množiny spočetné a nespočetné.
2. Funkce: definice, inverzní funkce, složená funkce, operace s funkcemi, elementární funkce (např. mocninná funkce, exponenciální funkce, logaritmická funkce, trigonometrické funkce, cyklometrické funkce).
3. Limita funkce: definice, jednostranná limita, existence limity, limita v nevlastních bodech, věty pro výpočet limit, L'Hospitalovo pravidlo.
4. Spojitost funkce: definice, pravostranná a levostranná spojitost, operace se spojitými funkcemi, spojitost složené funkce, věta o nabývání maxima a minima.
5. Derivace funkce: definice, tečna a normála ke grafu funkce, souvislost derivace funkce se spojitostí funkce, pravidla pro počítání derivací, derivace součtu, součinu, podílu, složené funkce, mocninné funkce, trigonometrických funkcí, derivace implicitně definovaných funkcí, derivace vyšších řádů.
6. Aplikace derivace: funkce klesající a rostoucí, konvexní a konkávní, inflexní bod, lokální extrém, nutné a postačující podmínky pro lokální extrém, asymptoty, věta o střední hodnotě, L'Hospitalovo pravidlo, Newtonova metoda přibližného řešení rovnic.
7. Primitivní funkce: definice, základní vlastnosti, substituční metoda, metoda per partes, metody integrace racionálních, trigonometrických a iracionálních funkcí.
8. Riemannův integrál: definice, základní vlastnosti, postačující podmínky pro existenci Riemannova integrálu, substituční metoda a metoda per partes pro Riemannův integrál, vztah mezi primitivní funkcí a Riemannovým integrálem (Newtonova formule).
9. Nevlastní integrál: definice, konvergence, integrální kriterium pro součet nekonečné řady.
10. Geometrické aplikace Riemannova integrálu: střední hodnota funkce,odvození vztahů pro obsah rovinného obrazce, objem rotačního tělesa, obsah povrchu rotačního tělesa, délku křivky.
11. Parciální derivace: definice parciální derivace, diferencovatelnost a spojitost funkce, diferenciál, tečná rovina, derivace složené funkce, směrová derivace, gradient, parciální derivace vyšších řádů.
12. Aplikace parciální derivace: lokální extrémy, nutné a postačující podmínky pro existenci lokálních extrémů, postup pro jejich hledání, absolutní extrémy, vázané extrémy.
13. Posloupnosti: definice, příklady posloupností, základní pojmy, definice konvergence, absolutní a neabsolutní konvergence, věty o posloupnostech, aritmetická a geometrická posloupnost.
14. Číselné řady: součet řady, Bolzano-Cauchyova podmínka konvergence, vlastnosti číselných řad, kritéria konvergence, absolutní konvergence.
15. Funkční posloupnosti a řady: bodová a stejnoměrná konvergence, příklad posloupnosti funkcí konvergujících bodově a ne stejnoměrně, Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence, vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností a řad funkcí, mocninné řady, obor konvergence mocninné řady a jeho určení, základní vlastnosti mocninných řad, Taylorova řada.
16. Vícenásobný Riemannův integrál: dvojný a trojný integrál, definice, základní vlastnosti, Fubiniova věta, základní transformace – posunutí, polární a sférické souřadnice, substituční metoda, geometrické aplikace.

Matematika 2

1. Matice, operace s maticemi, elementární řádkové úpravy, převod matice na schodovitý tvar a její hodnost, řešení soustav lineárních rovnic a Gaussova eliminační metoda, determinanty matic a regulární/singulární matice, inverzní matice.
2. Množiny a relace na množině, kartézský součin množin, relace (reflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita), relace ekvivalence a rozklad množiny na třídy, uspořádání.
3. Binární operace na množině a její vlastnosti (asociativita, komutativita, existence jednotkového prvku a inverzních prvků), algebraické struktury s jednou operací (grupoidy, pologrupy, grupy), algebraické struktury se dvěma operacemi (okruhy, tělesa, obory integrity), příklady: N, Z, Q, R, C.
4. Permutace n-prvkové množiny, cykly a transpozice, rozklady permutací na nezávislé cykly a transpozice, skládání permutací, grupa permutací, inverze v permutaci a parita permutace. Potenční množiny a princip inkluze a exkluze pro 2- a 3-prvkovou množinu.
5. Dělitelnost celých čísel, největší společný dělitel dvou celých čísel, Euklidův algoritmus a Bezoutova rovnost, prvočísla a nesoudělnost, kongruence a zbytkové třídy.
6. Polynomy nad Q (resp. Z), R a C, operace s polynomy, hodnota polynomu a Hornerovo schéma, jednoduché a násobné kořeny polynomu, racionální kořeny polynomu s celočíselnými koeficienty, ireducibilní polynomy, rozklad polynomů nad Q, R a C na ireducibilní polynomy, základní věta algebry.
7. Vektorové prostory a podprostory, lineární kombinace vektorů, lineárně závislé a nezávislé systémy vektorů, generování, báze a dimenze vektorového prostoru resp. podprostoru, souřadnice vektoru v bázi, průnik a součet vektorových podprostorů.
8. Lineární zobrazení vektorových prostorů, jádro a obraz lineárního zobrazení, matice lineárního zobrazení v různých bázích, matice přechodu od báze k bázi a transformace souřadnic, skládání zobrazení.
9. Vlastní čísla a vlastní vektory matice resp. lineárního zobrazení, invariantní a vlastní prostory, algebraická a geometrická násobnost vlastního čísla, zobecněné vlastní vektory, Jordanovy buňky, Jordanův kanonický tvar.
10. Bilineární a kvadratické formy, matice bilineární/kvadratické formy vzhledem ke zvolené bázi, singulární a regulární formy, symetrické a antisymetrické formy, polární báze symetrické bilineární resp. kvadratické formy a diagonální tvar, definitnost a signatura, zákon setrvačnosti (klasifikace kvadratických forem nad R).
11. Vektorové prostory se skalárním součinem (reálné), ortogonální vektory, norma a odchylka vektorů, ortogonální/ortonormální báze, Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces, ortogonální doplněk množiny vektorů, kolmá projekce vektoru do podprostoru.
12. Vzájemná poloha afinních podprostorů v afinním a Euklidovském prostoru R^n, kolmost podprostorů, metody zjišťování vzájemné polohy, nadroviny a jejich vzájemná poloha, význačnost mimoběžnosti, příčky mimoběžek v R^3.
13. Souřadnicový popis afinního podprostoru (parametrický, implicitní/neparametrický/obecný) v afinním a Euklidovském prostoru R^n, zaměření podprostoru a jeho ortogonální doplněk při daném popisu, převedení jednoho popisu na druhý.
14. Vzdálenost afinních podprostorů v Euklidovském bodovém prostoru, využití kolmé projekce k nalezení vzdálenosti, odchylky vektorů a jednorozměrných (afinních) podprostorů v Euklidovském bodovém prostoru, odchylka přímky a podprostoru.
15. Afinity a shodnosti, samodružné body a směry afinit, základní afinity v rovině R^2 a jejich vlastnosti, základní shodnosti v rovině R^2 a jejich vlastnosti.

Matematická analýza

1. Číselné množiny: přirozená čísla (Peanovy axiomy), racionální čísla, reálná čísla, komplexní čísla, supremum, infimum číselné množiny, množiny spočetné a nespočetné.

2. Funkce: definice, inverzní funkce, složená funkce, operace s funkcemi, elementární funkce (např. mocninná funkce, exponenciální funkce, logaritmická funkce, trigonometrické funkce, cyklometrické funkce).

3. Limita funkce: definice, jednostranná limita, existence limity, limita v nevlastních bodech, věty pro výpočet limit, L'Hospitalovo pravidlo.

4. Spojitost funkce: definice, pravostranná a levostranná spojitost, operace se spojitými funkcemi, spojitost složené funkce, věta o nabývání maxima a minima.

5. Derivace funkce: definice, tečna a normála ke grafu funkce, souvislost derivace funkce se spojitostí funkce, pravidla pro počítání derivací, derivace součtu, součinu, podílu, složené funkce, mocninné funkce, trigonometrických funkcí, derivace implicitně definovaných funkcí, derivace vyšších řádů.

6. Aplikace derivace: funkce klesající a rostoucí, konvexní a konkávní, inflexní bod, lokální extrém, nutné a postačující podmínky pro lokální extrém, asymptoty, věta o střední hodnotě, L'Hospitalovo pravidlo, Newtonova metoda přibližného řešení rovnic.

7. Primitivní funkce: definice, základní vlastnosti, substituční metoda, metoda per partes, metody integrace racionálních, trigonometrických a iracionálních funkcí.

8. Riemannův integrál: definice, základní vlastnosti, postačující podmínky pro existenci Riemannova integrálu, substituční metoda a metoda per partes pro Riemannův integrál, vztah mezi primitivní funkcí a Riemannovým integrálem (Newtonova formule).

9. Nevlastní integrál: definice, konvergence, integrální kriterium pro součet nekonečné řady.

10. Geometrické aplikace Riemannova integrálu: střední hodnota funkce,odvození vztahů pro obsah rovinného obrazce, objem rotačního tělesa, obsah povrchu rotačního tělesa, délku křivky.

11. Parciální derivace: definice parciální derivace, diferencovatelnost a spojitost funkce, diferenciál, tečná rovina, derivace složené funkce, směrová derivace, gradient, parciální derivace vyšších řádů.

12. Aplikace parciální derivace: lokální extrémy, nutné a postačující podmínky pro existenci lokálních extrémů, postup pro jejich hledání, absolutní extrémy, vázané extrémy.

13. Posloupnosti: definice, příklady posloupností, základní pojmy, definice konvergence, absolutní a neabsolutní konvergence, věty o posloupnostech, definice limsup a liminf posloupnosti, aritmetická a geometrická posloupnost.

14. Číselné řady: součet řady, Bolzano-Cauchyova podmínka konvergence, vlastnosti číselných řad, kritéria konvergence, absolutní konvergence.

15. Funkční posloupnosti a řady: bodová a stejnoměrná konvergence, příklad posloupnosti funkcí konvergujících bodově a ne stejnoměrně, Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence, vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností a řad funkcí, mocninné řady, obor konvergence mocninné řady a jeho určení, základní vlastnosti mocninných řad, Taylorova řada.

16. Vícenásobný Riemannův integrál: dvojný a trojný integrál, definice, základní vlastnosti, Fubiniova věta, základní transformace – posunutí, polární a sférické souřadnice, substituční metoda, geometrické aplikace.

17. Vektorové funkce více proměnných: definice, základní vlastnosti, spojitost, limita, derivace, Jacobiho matice, integrál, gradient, divergence, rotace.

18. Křivkový integrál: pojem křivky, parametrické vyjádření křivky v rovině a prostoru (např. kružnice a elipsa), základní vlastnosti křivek (hladká křivka, jednoduchá křivka, uzavřená křivka), křivkový integrál 1. druhu (motivace odvození, definice, aplikace), křivkový integrál 2. druhu (motivace odvození, definice, Greenova věta, nezávislost na cestě, aplikace).

17. Plošný integrál: pojem plochy, parametrické vyjádření plochy v prostoru, hladká plocha, plošný integrál 1. druhu (tečná rovina k parametrizované hladké ploše, motivace odvození, definice, aplikace), plošný integrál 2. druhu (orientace parametrizované hladké plochy, motivace odvození, definice, věta o divergenci), Stokesova věta.

Geometrie

1. Vektorové prostory a podprostory, lineární kombinace vektorů, lineárně závislé a nezávislé vektory, generování, báze a dimenze vektorového prostoru resp. podprostoru, souřadnice, průnik a součet podprostorů.

2. Lineární zobrazení vektorových prostorů, jádro a obraz lineárního zobrazení, matice lineárního zobrazení v různých bázích, matice přechodu od báze k bázi a transformace souřadnic. Skládání zobrazení.

3. Bilineární a kvadratické formy, matice bilineární formy vzhledem ke zvolené bázi, singulární a regulární formy, symetrické a antisymetrické formy, polární báze symetrické bilineární resp. kvadratické formy, definitnost a signatura, zákon setrvačnosti (klasifikace kvadratických forem nad R).

4. Vektorové prostory se skalárním součinem, ortogonální vektory, norma vektorů, ortogonální a ortonormální báze, Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces, ortogonální doplněk množiny vektorů, kolmá projekce vektoru do podprostoru.

5. Vlastní čísla a vlastní vektory matice resp. lineárního zobrazení, invariantní podprostory, řetízky, vlastní prostory, Jordanův kanonický tvar.

6. Afinní prostory a podprostory, zaměření afinního prostoru resp. podprostoru, dimenze, afinní repér a souřadnice, afinní kombinace bodů a body v obecné poloze, průnik a součet afinních podprostorů.

7. Parametrický a implicitní popis afinních podprostorů, vzájemná poloha afinních podprostorů v afinním a Euklidovském bodovém prostoru, metody zjišťování vzájemné polohy. Příčky mimoběžek v R^3.

8. Euklidovské bodové prostory, kartézská souřadná soustava a kartézské souřadnice, kolmost podprostorů, parametrické a implicitní zadání podprostorů - co je zaměření podprostoru a jeho ortogonální doplněk při daném popisu.

9. Vzdálenost podprostorů, využití kolmé projekce k nalezení vzdálenosti, odchylky vektorů a jednorozměrných podprostorů, obecná definice odchylky afinních podprostorů, nalezení odchylky přímky a podprostoru.

10. Afinity a shodnosti, samodružné body a směry afinit, základní afinity v rovině a jejich vlastnosti, základní shodnosti v rovině a jejich vlastnosti.

11. Vektorové a afinní podprostory R^n, řešení homogenních soustav lineárních rovnic, množiny řešení jako vektorové prostory R^n, řešení nehomogenních soustav lineárních rovnic, množiny řešení jako afinní prostory R^n.

Algebra

1. Výroková logika, matematické důkazy, Booleova algebra, minimalizace výrokové formy, ekvivalentnost formulí, normální formy, predikátová logika 1. řádu.

2. Množiny a relace na množině, kartézský součin množin, relace a jejich vlastnosti, zobrazení, relace ekvivalence, rozklad množiny na třídy, uspořádání, význačné prvky v uspořádaných množinách, Hasseův diagram.

3. Matice, operace s maticemi, maticové rovnice a inverzní matice, elementární řádkové resp. sloupcové úpravy, převod matice na schodovitý tvar a její hodnost, řešení soustav lineárních rovnic a Gaussova eliminační metoda, regulární a singulární matice, determinanty, LU rozklad matice a jeho použití.

4. Binární operace na množině, vlastnosti (asociativita, komutativita, existence jednotkového prvku, inverze), algebraické struktury s jednou operací – grupoidy, pologrupy, grupy, příklady – N, Q, R, C, algebraické struktury matic.

5. Permutace množiny, cykly a transpozice, rozklady permutací na nezávislé cykly a transpozice, skládání permutací, grupa permutací, parita permutace.

6. Dělitelnost celých čísel, největší společný dělitel, Euklidův algoritmus, korektnost Euklidova algoritmu, Bezoutova rovnost, grupa resp. okruh zbytkových tříd.

7. Kongruence, prvočísla, faktorizace přirozených čísel na prvočísla, Eulerova a Fermatova věta, lineární kongruenční rovnice a jejich systémy.

8. Algebraické struktury se dvěma operacemi – okruhy, obory integrity, tělesa. Číselná tělesa N, Q, R, C, okruhy zbytkových tříd.

9. Polynomy nad Q, R, C, operace s polynomy, okruh polynomů, kořeny polynomu, ireducibilní polynomy, rozklad polynomů nad Q, R a C na ireducibilní polynomy, základní věta algebry, základní principy interpolace (Langrangeův a Newtonův tvar interpolačního polynomu), proložení bodů polynomem pomocí metody nejmenších čtverců.

10. Matematická indukce, binomická a multinomická věta, princip inkluze a exkluze.

11. Graf a jeho vlastnosti, matice sousednosti a její mocniny, skóre grafu, hledání nejkratší cesty, hledání minimální kostry grafu, Eulerovský graf.

Diferenciální rovnice

1. Definice řešení diferenciální rovnice v R, metoda řešení pomocí separace proměnných, lineární diferenciální rovnice, řešení homogenní a nehomogenní úlohy (metoda variace konstant).

2. Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu, fundamentální systém řešení, prostor řešení jako lineární vektorový prostor, metoda variace konstant.

3. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic, fundamentální systém řešení, prostor řešení jako lineární vektorový prostor, metoda variace konstant.

4. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Řešení, exponenciální matice.

5. Nelineární diferenciální rovnice. Pevný bod, isokliny. Vyšetřování lokální stability pevného bodu linearizací soustavy. Ljapunovská funkce.

6. Úloha na vlastní čísla pro obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu pro různé typy okrajových podmínek. Vlastní čísla a vlastní funkce.

7. Fourierova metoda řešení okrajových úloh. Fourierova řada vzhledem k systému vlastních funkcí pro okrajové úlohy druhého řádu. Postačující podmínky pro konvergenci Fourierovy řady.

8. Rovnice vedení tepla/difuze. Fickův zákon. Řešení na přímce. Difuzní jádro. Vlastnosti řešení. Řešení okrajové úlohy pomocí Fourierovy metody.

9. Vlnová rovnice. Řešení počáteční úlohy na přímce. Řešení okrajové úlohy pomocí Fourierovy metody. Kmitání struny.

10. Lineární parciální diferenciální rovnice, řešení metodou charakteristik

Aplikovaná matematika

1. Hry v rozvinutém tvaru, strom hry, řešení metodou zpětné indukce

2. Hry v maticovém tvaru, řešení her metodou eliminace dominovaných strategií. Smíšené strategie. Sedlový bod pro hru s nulovým součtem, horní a dolní hodnota hry.

3. Nashova rovnováha. Výpočet Nashových equilibrií, Bishop-Canningsova věta. Evolučně stabilní strategie. Hra jestřáb-hrdlička. Kámen-nůžky-papír.

4. Vězňovo dilema jako model sociálního konfliktu. Opakované vězňovo dilema jako model kooperace.

5. Replikátorová dynamika. Analýza stability pevných bodů replikátorové dynamiky pro hry se dvěma strategiemi.

6. Model průhybu membrány: Poissonova rovnice a odpovídající tvar energetického funkcionálu. Různé okrajové podmínky a jejich mechanická interpretace. Rozšíření na úlohu s překážkou.

7. Matematická teorie pružných těles – tenzor napětí a deformace, Hookův zákon, formulace okrajových úloh teorie pružnosti.

8. Řešení nelineárních rovnic, metoda bisekce, rychlost bisekce, Newtonova metoda, kvadratická konvergence.

9. Řešení soustav lineárních rovnic, LU rozklad matice a jeho užití, iterační metody - Gaussova a Jacobiho, konvergence iteračních metod, maticové normy

10. Částečný a úplný problém vlastních čísel, mocninná metoda, QR metoda.

11. Řešení počátečních úloh pro obyčejné diferenciální rovnice – Eulerova metoda, metody typu Runge-Kutta, řešení soustav diferenciálních rovnic

12. Řešení okrajových úloh pro pro obyčejné diferenciální rovnice – metoda střely, metoda konečných diferencí, metoda konečných prvků (matice tuhosti a hmotnosti)

13. Pravděpodobnost: definice, náhodný jev, nezávislost jevů, podmíněná pravděpodobnost, Bayesova formule.

14. Matematická statistika: náhodná veličina, příklady spojitých a diskrétních náhodných veličin. Princip testování hypotéz.

Úvod do analýzy v komplexním oboru:

1. Komplexní čísla a jejich tvary, práce s nimi, rozšířená Gaussova rovina,
2. Komplexní funkce komplexní proměnné, důležité příklady funkcí (exponenciální, goniometrické, hyperbolická, logaritmická, odmocninná) a jejich vlastnosti a rozdíly od reálných funkcích reálné proměnné.
3. Derivace komplexní funkce komplexní proměnné, pojem holomorfní funkce, souvislost derivace a spojitosti, Cauchy-Riemmanovy podmínky.
4. Integrál komplexní funkce po uzavřené křivce, Cauchyho věta(y), Cauchyho integrální vzorce včetně vysvětlujícího přikladu, pojem primitivní funkce a otázka nezávislosti integrálu na cestě.
5. Číselné řady, posloupnosti a řady funkcí a kritéria konvergence, mocninné řady, Taylorovy řady, Laurentovy řady včetně vysvětlujícího příkladu.